

Corrigé TD4 page 73 (l'implication)

1.a. Parmi les valeurs proposées, la propriété est fausses pour $-1, 0$ et 1 . Vraie pour les autres valeurs.

1.b. " $x^2 \geq 4$ " est fausse quand " $x^2 < 4$ " (négation), donc pour $x \in]-2; +2[$

En effet, " $x^2 < 4$ " quand " $x^2 - 4 < 0$ " donc quand $(x - 2)(x + 2) < 0$ si $(x - 2)$ et $(x + 2)$ sont de signes contraires.

★ soit quand $(x - 2) > 0$ et $x + 2 < 0$ c'est à dire pour $x > 2$ **et** $x < -2$ ce qui est impossible.

★ soit quand $(x - 2) < 0$ et $x + 2 > 0$ c'est à dire pour $x < 2$ **et** $x > -2$ donc pour $x \in]-2; +2[$.

2.a. $A : "x \geq 3"$ $B : "x^2 \geq 4"$

A	B	
V	V	pour $x = 3$ par exemple
V	F	Impossible car si $x \geq 3$, alors $x^2 \geq 9$ donc $x^2 \geq 4$ et B est vraie
F	V	$x = -5$ par exemple
F	F	$x = -1$ par exemple

En fait, A est fausse et B est vraie si $x < 3$ et $x^2 \geq 4$ donc pour $x \in]-\infty; -2] \cup [2; 3[$

et A et B sont fausses simultanément si $x < 3$ et $x^2 \leq 4$ donc pour $x \in]-2; 2[$

Les démonstrations sont voisines de celle du 1.b. J'en fait "l'économie" pour rester sur le terrain de la logique.

Ainsi, lorsqu'une propriété A étant vraie, B l'est forcément aussi, on dit que A implique B et on note $A \Rightarrow B$.

Ainsi, si $A \Rightarrow B$, A vraie et B fausse est impossible. Mais, si A est fausse, on ne sait rien de B . qui peut être vraie ou fausse.

4. Pour montrer qu'une implacation est fausse, il suffit de trouver un exemple pour lequel A est vraie et B fausse.

★ $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 3$ est **fausse** puisque pour $x = 2$, la première proposition est vraie et la seconde fausse.

★ $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 2$ est **vraie**. En fait on a prouvé au 1.b. que $x^2 < 4 \Rightarrow x \in]-2; +2[$.

Par négation, on a donc $x^2 \geq 4$ est vraie si $x \notin]-2; +2[$ Donc $x^2 \geq 4 \Rightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

★ $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ est **fausse**. Pour $x = -3$ par exemple, $9 = (-3)^2$ est vraie, mais $-3 = \sqrt{9}$ est fausse.

Pour écrire une implication vraie, il faudrait rajouter : $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$

★ n pair $\Rightarrow n$ multiple de 6 est **fausse**. Pour $n = 2$, la première proposition est vraie et la seconde fausse.

★ n multiple de 6 $\Rightarrow n$ pair est **vraie**. On peut le démontrer par implications successives :

n multiple de 6 $\Rightarrow n = 6k$

$$\Rightarrow n = 2 \times 3 \times k$$

$$\Rightarrow n = 2 \times (3 \times k)$$

$$\Rightarrow n = 2k' \text{ et donc } n \text{ multiple de } 2 \Rightarrow n \text{ pair..}$$

Remarque : On a vu dans le 2. que $x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 4$ et au 4. que $x^2 \geq 4$ n'implique pas $x \geq 3$

Il faut donc bien différencier $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

Lorsque ces deux implications sont vraies on dit que A et B sont équivalentes et on note $A \Leftrightarrow B$.

C'est d'ailleurs l'objet du TD suivant du livre que vous devez faire.