Exercice 84 p82 de l'hyperbole édition 2004

Partie A : Découverte d'une fonction

1.a.L'énoncé propose de faire le calcul pour $x = 5$, puis pour $x = 10$. Il est plus simple de le faire directement pour la longueur x, puis de remplacer x successivement par 5 puis 10, même si ce n'est pas vraiment dans l'esprit de l'exercice.

Remarquons que le triangle ABC étant équilatéral, la hauteur (AH) est aussi médiane. H est donc le milieu de $[BC]$ donc $BH = \dfrac{x}{2}$.

Le théorème de Pythagore appliué au triangle ABH restangle en H donne : $AH^2 = AB^2 + BH^2 \Rightarrow AH^2 = 100 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

On a donc $AH^2 = 100 - \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{400 - x^2}{4}$ d'où $AH = \sqrt{\dfrac{400 - x^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{400 - x^2}$.

★ Ainsi, pour $x = 5$, $AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{400 - 25} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{375}$. Or $375 = 15 \times 25$ donc $\boxed{AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{15 \times 25} = \dfrac{5}{2}\sqrt{15} \text{ cm}}$

L'aire du triangle, qui vaut $\dfrac{AH \times BC}{2}$ vaut alors $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{15} \times 5$ donc $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{25}{4}\sqrt{15} \text{ cm}^2}$

★ De même pour $x = 10$, $AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{400 - 10^2} \Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{300}$ donc $AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{3 \times 100} = \dfrac{1}{2} \times 10\sqrt{3}$

Donc $AH = 5\sqrt{3}$ et $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times 5\sqrt{3} \times 10 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2}$

1.b. La longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. On a donc forcément $BC \leq AB + AC$ c'est à dire $BC \leq 20$. Comme BC est une longueur, on a $BC \geq 0$ d'où $BC \in [0; 20]$.

Ainsi $x = 30$ n'est pas concevable.

2.a. On a donc déjà répondu à cette question : $\boxed{AH = \dfrac{1}{2}\sqrt{400 - x^2}}$.

2.b. L'aire recherchée vaut alors $\dfrac{1}{2}AH \times BC$ d'où $f(x) = \dfrac{1}{2}x \times \dfrac{1}{2}\sqrt{400 - x^2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \dfrac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}}$.

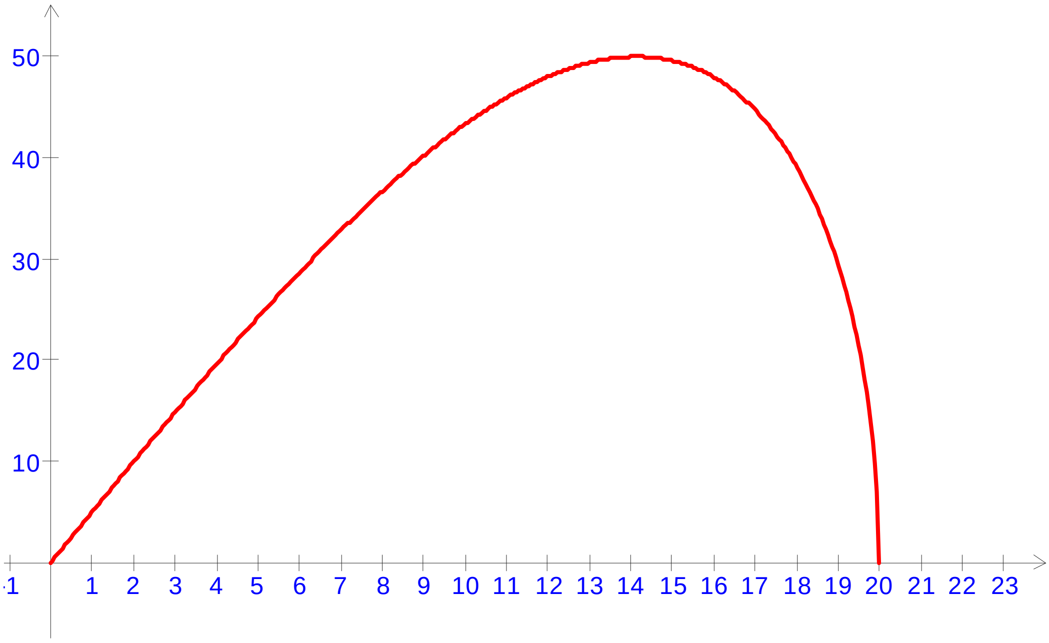
2.c.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0,0	5,0	9,9	14,8	19,6	24,2	28,6

x	7	8	9	10	11	12	13
f(x)	32,8	36,7	40,2	43,3	45,9	48,0	49,4

x	14	15	16	17	18	19	20
f(x)	50,0	49,6	48,0	44,8	39,2	29,7	0,0

2.d.



Partie B : Recherche d'un maximum

1.a. On constate sur le tableau précédent que la valeur maximale de l'aire est atteinte pour x compris entre 13 et 15. $\boxed{\text{Donc } x_0 \in [13;15]}$.

1.b. Il est bien évident qu'il faut forcer la calculette à donner un grand nombre de décimales, faute de quoi toutes les cases seront remplie du nombre 50, ce qui n'apporte aucun renseignement supplémentaire.

x	14,1	14,11	14,12	14,13	14,14	14,15	14,16
f(x)	49,99911493	49,99948482	49,99975539	49,99992643	49,99999772	49,99996906	49,99984023

Dans le tableau qui précède, le maximum est atteint entre $14,13$ et $14,15$. $\boxed{\text{Donc } x_0 \in [14.13;14.15]}$.

2.a. *La* hauteur est alors BK et l'aire du triangle est $\mathcal{A} = \dfrac{BK \times AC}{2}$ donc $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{BK \times 10}{2} = 5BK}$

2.b. L'aire du triangle sera donc maximale lorsque BK est maximale. Or dans le triangle BKA rectangle en K, BK est toujours de longueur inférieure ou égale à l'hypoténuse AB. BK sera maximale quand $BK = AB = 10$. Le point A est alors confondu avec le point K et **le triangle ABC est isocèle rectangle en A.**

2.c. L'aire maximale est donc atteinte quand $BK = 10$ et vaut donc 50 cm^2.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle BAC donne alors $x_0^2 = BA^2 + AC^2 = 200 \Rightarrow \boxed{x_0 = 10\sqrt{2}}$

Un simple calcul en valeur approchée permet de confirmer les encadrements précédents puisque $10\sqrt{2} \approx 14.142$